

Quiz # 5 - Estimation (solutions)

IFT 3345

— Nom:

— Matricule:

Question 1. *Un robot mesure sa position le long d'une ligne. On modélise son état x comme suit:*

$$x_0 = 10, \sigma_0^2 = 2$$

Le robot se déplace selon le modèle de mouvement :

$$x_t = x_{t-1} + u_t + w, w \sim \mathcal{N}(0, Q), Q = 1$$

avec $u_1 = 2$. *Le robot mesure ensuite sa position avec un capteur qui possède un modèle de la forme :*

$$z_t = x_t + v, v \sim \mathcal{N}(0, R), R = 2$$

$z_1 = 13$

(a) *Calculez la moyenne prédite $\bar{\mu}_1$ et la variance prédite $\bar{\sigma}_1^2$.*

(b) *Calculez le gain de Kalman K .*

(c) *Calculez la moyenne mise à jour μ_1 et la variance corrigée σ_1^2 .*

Les équations suivantes du filtre de Kalman pourraient être utiles :

$$\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B u_t$$

$$\bar{\sigma}_t = A_t \sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - H_t \bar{\mu}_t)$$

$$\sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\sigma}_t$$

$$K_t = \bar{\sigma}_t H_t^\top (H_t \bar{\sigma}_t H_t^\top + R_t)^{-1}$$

(a) En identifiant que $A = 1$ et $B = 1$ et en utilisant le modèle de mouvement et propagation de l'incertitude:

$$\bar{\mu}_1 = A \mu_0 + B u_1 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 2 = 12$$

$$\bar{\sigma}_1^2 = A \sigma_0^2 A^\top + Q = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

(b) En identifiant que $H = 1$, soit en calculant $\frac{\partial z_t}{\partial x_t} = 1$ ou en se rappelant que le modèle de mesure dans un filtre de Kalman est une fonction linéaire de la forme $z_t = H_t x_t + v$, on obtient :

$$\begin{aligned} K_1 &= \bar{\sigma}_1^2 H^\top (H \bar{\sigma}_1^2 H^\top + R)^{-1} \\ &= \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 1 + 2} \\ &= \frac{3}{5} = 0.6 \end{aligned}$$

(c) Nous avons maintenant tout ce dont nous avons besoin pour appliquer les équations de mise à jour :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \bar{\mu}_1 + K_1(z_1 - H\bar{\mu}_1) \\ &= 12 + 0.6 \cdot (13 - 1 \cdot 12) \\ &= 12 + 0.6 = 12.6 \\ \sigma_1^2 &= (1 - K_1 H) \bar{\sigma}_1^2 \\ &= (1 - 0.6 \cdot 1) \cdot 3 \\ &= 0.4 \cdot 3 = 1.2 \end{aligned}$$

Question 2. *Quel type de filtre (Kalman ou particulaire) utiliseriez-vous pour localiser un robot dans un couloir sachant que :*

- le robot ne peut se déplacer que dans les deux sens;
- le couloir contient des portes dont la position est connue;
- le robot est équipé d'un détecteur de portes?

Justifier votre choix.

Puisqu'il peut y avoir de l'ambiguïté concernant quelle porte est détectée, nous sommes en présence d'une distribution multi-modale. Le filtre de Kalman suppose une distribution gaussienne (unimodale) et ne peut donc pas représenter cette ambiguïté, tandis que le filtre particulaire peut naturellement maintenir plusieurs hypothèses simultanément avec ses particules. Le filtre particulaire est donc plus adéquat.

Question 3. *Quel type de filtre (Kalman ou Kalman étendu) utiliseriez-vous pour localiser un robot capable de se déplacer de manière linéaire et de détecter le relèvement relatif de points de repères connus ? Justifiez votre choix.*

Bien que le modèle de mouvement soit linéaire, le modèle de mesure du relèvement relatif $z = \arctan 2(y_\ell - y_r, x_\ell - x_r) - \theta_r$ est une fonction non-linéaire de l'état. Le filtre de Kalman standard exige des modèles linéaires, tandis que le filtre de Kalman étendu linéarise le modèle de mesure à travers son jacobien $H = \frac{\partial h}{\partial x}$ autour de l'estimé courant. Le filtre de Kalman étendu est donc le choix approprié.

Question 4. *Si tous les autres facteurs restent constants, pensez-vous qu'il faudrait plus ou moins de particules pour localiser un robot en 3D (c'est-à-dire une pose dans $SE(3)$) qu'en 2D (c'est-à-dire une pose dans $SE(2)$) ? Justifiez votre réponse.*

Une pose en $SE(2)$ a 3 degrés de liberté (x, y, θ) , tandis qu'une pose en $SE(3)$ en a 6 $(x, y, z, \text{roll}, \text{pitch}, \text{yaw})$. À cause de la malédiction de la dimensionnalité (*curse of dimensionality*), le nombre de particules nécessaires pour échantillonner adéquatement l'espace d'état croît exponentiellement avec la dimension. Il faut donc un nombre beaucoup plus grand de particules pour localiser un robot en 3D qu'en 2D.