

# Examen Intra

IFT 3345

25 février 2026

## Directives

- Vous avez droit à une page de notes (recto verso) écrite **à la main**.
- Calculatrice est autorisée.
- Répondez dans le cahier fourni **à l'exception de Question 1** que vous pouvez répondre sur cette feuille.
- Le pointage pour chaque question est entre parenthèses (total = 30).
- Les traductions en anglais sont en *italics*.
- Vous pouvez répondre en anglais ou en français.
- Notez clairement toutes les suppositions que vous faites.

### Question 0. *Nom et matricule (1 point de bonus)*

Écrivez votre nom et votre matricule sur de cette feuille et sur votre cahier d'examen.

### Question 1. *Questions à choix multiples (0,5 point chacune — total = 3 points) :*

- (a) Laquelle des distributions suivantes représente la croyance a priori (*prior belief*) au temps  $t$ ,  $\bar{\text{bel}}(x_t)$ ?
- (A)  $p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t-1}, x_0)$
  - (B)  $p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, x_0)$
  - (C)  $p(x_{t-1} | z_{1:t}, u_{1:t-1}, x_0)$
  - (D)  $p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t-1}, x_0)$
- (b) Combien de correspondances de points sont nécessaires pour estimer une matrice d'homographie plane dans l'espace projectif 2D  $\mathbb{P}^2$  (en supposant qu'ils ne sont pas colinéaires) ?
- (A) 4
  - (B) 8
  - (C) 9
  - (D) 16
- (c) Parmi les capteurs suivants, lesquels sont considérés comme « exteroceptifs » (cochez toutes les réponses applicables) ?
- Caméra
  - LiDAR
  - IMU
  - GPS

(d) Parmi les affirmations suivantes concernant le réglage d'un contrôleur PID, lesquelles sont vraies (cochez toutes les réponses applicables)?

- Augmenter le gain proportionnel augmente le temps de montée *rise time*
- Augmenter le gain dérivatif augmente le temps de montée *rise time*
- Augmenter le gain proportionnel diminue le temps de montée *rise time*
- Augmenter le gain dérivatif diminue le temps de montée *rise time*

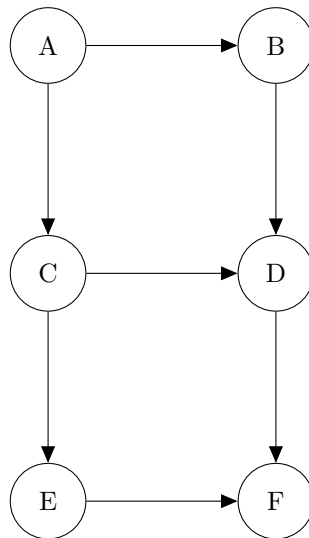
(e) Laquelle des affirmations suivantes est vraie :

- (A) SARSA et Q-learning sont tous deux des algorithmes « on-policy ».
- (B) SARSA est un algorithme « on-policy » et Q-learning est un algorithme « off-policy ».
- (C) SARSA est un algorithme « off-policy » et Q-learning est un algorithme « on-policy ».
- (D) SARSA et Q-learning sont tous deux des algorithmes « off-policy ».

(f) Lequel des éléments suivants n'est pas contenu dans une unité de mesure inertielle (IMU) standard :

- (A) Accéléromètre
- (B) GPS
- (C) Gyroscope
- (D) Magnétomètre

**Question 2.** Réseau de Bayes - Bayes' network (1 point)



Comment factoriseriez-vous la distribution conjointe des 6 variables aléatoires A-F étant donné le réseau bayésien présenté ci-dessus ?

**Question 3. Odométrie - Odometry (4 points)**

Un robot à entraînement différentiel (*differential drive*) se déplace sur une surface plane. Le rayon des roues est  $R = 0.1$  m et le *baseline* (distance entre les roues) est  $2L = 0.2$  m. Chaque encodeur de roue produit 500 impulsions par révolution complète.

Au temps  $t_0$ , les relevés des encodeurs sont :

$$(L_0, R_0) = (1000, 1000)$$

Au temps  $t_1$ , les relevés des encodeurs sont :

$$(L_1, R_1) = (1250, 1500)$$

Au temps  $t_2$ , les relevés des encodeurs sont :

$$(L_2, R_2) = (1450, 1700)$$

- Calculez la rotation angulaire,  $\Delta\phi$ , de chaque roue pour les intervalles  $t_0 \rightarrow t_1$  et  $t_1 \rightarrow t_2$  (Réponse attendue : quatre valeurs correspondant à l'angle de rotation de chaque roue pour chacun des deux déplacements).
- Calculez les deux déplacements incrémentaux de l'odométrie pour  $t_0 \rightarrow t_1$  et  $t_1 \rightarrow t_2$ .
- Exprimez ces déplacements d'odométrie sous forme de transformations  $SE(2)$ .
- Composez-les pour obtenir le déplacement total de  $t_0$  à  $t_2$  (sous forme de transformations  $SE(2)$ ).

**Question 4. Contrôle de poursuite pure - Pure pursuit (2 points)**

Un robot différentiel se déplace dans le plan et suit une trajectoire avec un contrôleur de poursuite pure.

**Données :**

- Pose actuelle :  $(x_r, y_r, \theta_r) = (0, 2, 0^\circ)$
- Trajectoire de référence :  $y = -1$
- Distance d'anticipation (*lookahead distance*) :  $L = 6$
- Vitesse avant constante à 1m/s

Quelle vitesse angulaire ( $\omega$ ) doit être commandée selon cette loi de commande pure pursuit ?

**Question 5. Coin Harris - Harris corners (2 points)**

Nous avons calculé les gradients horizontaux et verticaux dans une image sur une fenêtre de  $3 \times 3$  :

$$I_x = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad I_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculez le tenseur de structure (*structure tensor* - matrice du 2e ordre des moments) sur cette fenêtre  $3 \times 3$  en supposant une fonction de fenêtre uniforme  $w(x, y)$ .
- Calculez la réponse de Harris  $R$  en supposant une valeur de  $\alpha = 0.04$ . En vous basant sur cette réponse, déterminez si le pixel au centre de la fenêtre doit être classé comme une région plate, un bord ou un coin.

**Question 6.** *Transformée de Hough - Hough transform (2 points)*

Considérons une ligne horizontale dans l'image donnée par

$$y = y_0,$$

où  $y_0$  est une constante.

- (a) Pour un point arbitraire  $(x, y_0)$  sur cette ligne, écrivez la courbe qu'il génère dans l'espace de Hough.
- (b) Montrez que toutes ces courbes se coupent en un seul point  $(\rho^*, \theta^*)$  et donnez les coordonnées de ce point d'intersection.

**Question 7.** *Quaternions (4 points)*

Dans cette question, vous allez utiliser les quaternions pour faire tourner le vecteur 3D

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

autour de l'axe  $x$  de  $90^\circ$ .

- (a) Définissez le quaternion unitaire  $q$  que vous utiliserez pour effectuer cette rotation.
- (b) Définissez  $v$  comme un quaternion pur et calculez le vecteur tourné en utilisant le double produit quaternionique  $v' = qvq^*$ .
- (c) Exprimez la réponse finale sous forme de vecteur 3D.

**Question 8.** *Itération de politique - Policy iteration (3 points)*

Considérons la politique décrite par :

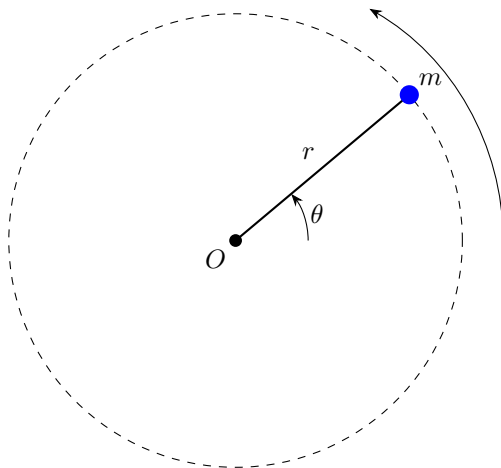
→	→	↓
→	→	↓
→	→	•

Dans ce processus de décision de Markov (MDP) :

- Vous pouvez passer vers n'importe quelle cellule voisine horizontalement ou verticalement (pas en diagonale)
  - Le coût associé à la transition est 1 si vous partez d'une des cellules jaunes et 2 si vous partez d'une des cellules rouges
  - La récompense (*reward*) pour entrer dans la cellule bleue est 5. La cellule bleue est un état terminal (vous ne la quittez jamais)
  - On suppose un facteur d'actualisation (*discount factor*) de  $\gamma = 1$
- (a) Calculez la fonction de valeur (*value function*),  $V$ , pour chaque état (vous pouvez la représenter sous forme d'une grille  $3 \times 3$  avec des valeurs).
  - (b) Effectuez un tour d'itération de politique (*policy iteration*) et tracez la politique mise à jour (vous pouvez la représenter sous forme d'une grille  $3 \times 3$  avec des flèches).
  - (c) La politique résultante est-elle optimale?

**Question 9.** *Contrôle optimal - Optimal control (4 points)*

Considérons une masse ponctuelle (*point mass*)  $m$  se déplaçant à un rayon fixe  $r$  dans un plan. Il est fixé à un axe au point  $O$  (sortant de la page) qui peut tourner librement. On peut faire tourner cet axe (ce qui entraînera le déplacement de la masse ponctuelle le long du cercle) en appliquant un moment de force (*torque*) (c'est-à-dire que le moment de force est l'entrée du système,  $u$ ).



L'équation qui régit le mouvement de la masse ponctuelle est l'analogie rotationnel de la deuxième loi de Newton :

$$\tau = mr^2\ddot{\theta}$$

où  $\ddot{\theta}$  est la dérivée seconde de l'angle (accélération angulaire).

Soit l'état du système :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

où  $\theta$  est la position angulaire et  $\omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire.

(a) Écrivez le modèle d'état en temps continu du système sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu.$$

(b) Si l'on suppose une fonction de coût de la forme

$$J = \alpha\theta^2 + \beta\dot{\theta}^2 + \gamma\tau^2$$

décrivez la forme de la loi de contrôle optimale (il n'est pas nécessaire de la résoudre).

**Question 10. *Rétroprojection - Backprojection* (5 points)**

Un robot mobile est équipé d'une caméra. Un pixel est détecté dans l'image et il est supposé se trouver **sur le plan du sol**. Votre tâche est de calculer la position 3D de ce point dans le **repère monde** (*world frame*).

On suppose que le repère monde (*world frame*) est "Est-Nord-Haut" — c'est-à-dire  $x$  vers la droite,  $y$  vers le haut, et  $z$  sortant du sol. On suppose également que le repère robot (*robot frame*) est "Est-Nord-Haut" — avec  $x$  sortant vers l'avant du robot,  $y$  vers la gauche et l'axe  $z$  vers le ciel. Le repère caméra (*camera frame*) a  $x$  vers la droite,  $y$  vers le bas, et  $z$  sortant de la caméra (donc l'axe  $x$  du robot est aligné avec l'axe  $z$  de la caméra).

Les paramètres intrinsèques de la caméra sont donnés par :

$$K = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 200 \\ 0 & 400 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La caméra est montée à la position  $(0, 0, 0.5)$  dans le **repère robot** avec une orientation alignée avec la direction du robot et parallèle au plan du sol.

La position du robot dans le repère monde est  $\mathbf{x} = (1, 0)$  (sur le plan du sol) avec un cap (*yaw* - orientation) de  $\psi = 0^\circ$ .

Une caractéristique est observée au pixel  $(u, v) = (300, 300)$  (à partir du coin supérieur gauche) et elle est **supposée être sur le plan du sol**. Trouvez le point sur le plan du sol qui a été observé.

Pour déterminer la position de la caractéristique dans le repère monde, nous devons procéder comme suit :

- (a) Rétroprojeter le pixel en un rayon dans le repère caméra.
- (b) Exprimer le plan du sol dans le repère caméra.
- (c) Intersecter le rayon avec le plan.
- (d) Transformer du repère caméra vers le repère robot.
- (e) Transformer du repère robot vers le repère monde.