Feuille d'exercices #1 — Représentations, Cinématique et Odométrie

IFT 3345

Question 1. *Composition et interprétation des quaternions*

Deux rotations sont appliquées séquentiellement :

1. Une rotation de 90° autour de l'axe $\mathbf{x}$
2. Suivie d'une rotation de 90° autour de l'axe $\mathbf{y}$

(a) Écrire les quaternions unitaires q_x et q_y correspondant aux deux rotations.

(b) Calculer le quaternion q représentant la **rotation totale**. Choisir l'ordre de multiplication correct et le justifier brièvement. **Indice :** L'ordre de multiplication est le même que pour la composition de deux transformations.

(c) Vérifier que le quaternion résultant est de norme unité.

(d) Appliquer la rotation au vecteur

$$\mathbf{p} = (0, 0, 1)$$

et donner le vecteur résultant $\mathbf{p'} \in \mathbb{R}^3$.

(e) Interpréter géométriquement l'orientation finale : après les deux rotations, où se trouve le point initial ?

Question 2. *LQR*

Considérons le système discret 1D

$$x_{k+1} = x_k + u_k,$$

où $x_k \in \mathbb{R}$ est l'état et $u_k \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande.

Nous souhaitons concevoir un régulateur linéaire quadratique (*linear quadratic regulator* - LQR) à horizon infini qui minimise le coût

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k^2 + r\, u_k^2 \right),$$

où $r > 0$ est un poids scalaire sur l'effort de commande.

(a) Identifier les matrices A, B, Q et R pour ce système.

(b) Écrire l'équation algébrique de Riccati en temps discret (*Discrete Algebraic Riccati Equation* - DARE).

(c) Résoudre analytiquement l'équation de Riccati afin d'obtenir le coefficient P de la fonction de coût optimale (*value function*).

(d) Calculer la loi de commande optimale par retour d'état

$$u_k = -K x_k,$$

et donner une expression explicite du gain K en fonction de r.

Question 3. *Itération de politique - Policy iteration*

Considérons le processus de décision markovien (*Markov Decision Process* - MDP) actualisé (*discounted*) suivant, avec facteur d'actualisation (*discount factor*) :

$$\gamma = 0.9.$$

Il y a trois états :

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}.$$

L'état s_3 est terminal et ne génère plus de récompense par la suite.
À l'état s_2, deux actions sont possibles :

$$A(s_2) = \{\text{Gauche},\ \text{Droite}\}.$$

À l'état s_1, il n'y a qu'une seule action : Droite.

Transitions et récompenses

- Depuis s_1 :
  - Aller à s_2 avec probabilité 1 et recevoir la récompense 0.
- Depuis s_2 :
  - Action **Gauche** : avec probabilité 1, aller à s_1 et recevoir la récompense +1.
  - Action **Droite** : avec probabilité 1, aller à s_3 et recevoir la récompense +3.
- Depuis s_3 :
  - Rester dans s_3 avec récompense 0 (état terminal).

(a) Calculer la fonction de valeur pour une politique π_{droite} où l'on va à droite dans l'état s_2 (évaluation de politique - *policy evaluation*).

(b) Effectuer une étape d'amélioration de politique à partir de la fonction de valeur obtenue (*policy improvement*).

(c) La politique trouvée en (b) est optimale. Pour quelle valeur de γ ne serait-elle plus optimale ?

Question 4. *Cinématique d'un robot mobile*

Considérons un robot mobile se déplaçant sur un plan. Sa pose dans le repère monde (*world frame*) est

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix},$$

où (x, y) est la position du robot et θ son orientation.

Le robot reçoit des commandes de vitesse exprimées dans le **repère du robot (*robot frame*)** :

- v : vitesse linéaire vers l'avant
- ω : vitesse angulaire

Le modèle cinématique en temps continu est :

$$\dot{x} = v\cos(\theta)$$
$$\dot{y} = v\sin(\theta)$$
$$\dot{\theta} = \omega$$

(a) Supposons que le robot démarre à
$$(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$$
et reçoit des entrées constantes $v = 1$ m/s et $\omega = \pi$ rad/s pendant 1 seconde. Calculer la pose finale.

(b) Discrétiser ce modèle à l'aide d'Euler avant avec maintien d'ordre zéro des entrées ((Une façon élégante de dire que nous maintenons les états et les entrées constants sur l'intervalle de discrétisation). Écrire le modèle cinématique en temps discret.

(c) En utilisant les mêmes commandes ($v = 1$m/s et $\omega = 1$rad/s pendant 1s) et une étape temporelle $\Delta t = 0.5$s, calculer la nouvelle pose finale.

(d) Quelle transformation (dans $SE(2)$) permet de passer de la pose obtenue en (c) à celle obtenue en (a) ?

Question 5. *Transformations de frames et composition de poses*

Mise en situation : Un robot se déplace sur un plan 2D. Sa pose dans le repère monde (*world frame*) est
$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{pmatrix}.$$

(a) Le robot est à
$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi/2 \end{pmatrix},$$
et un point dans le repère robot (*robot frame*) est
$${}^r p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m.}$$
Calculer les coordonnées du point dans le repère monde (*world frame*), ${}^w p$.

(b) Un point dans le repère monde (*world frame*) est
$${}^w q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Le robot est à
$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \pi/4 \end{pmatrix}.$$
Calculer les coordonnées du point dans le repère robot (*robot frame*), ${}^r q$.

(c) Le robot part de l'origine, orienté selon l'axe x du monde. Il avance de 2 m, tourne de $\pi/2$, puis avance de 1 m. Calculer la pose finale (x, y, θ) par composition des incréments d'odométrie.

Question 6. *Contrôle Pure Pursuit*

Un robot différentiel se déplace dans le plan et suit une trajectoire avec un contrôleur **pure pursuit**.
0.2cm
Données :

— Pose actuelle : $(x_r, y_r, \theta_r) = (1, 0, 90°)$

— Trajectoire de référence : $x = 0$

— Distance d'anticipation (*lookahead distance*) : $L = 4$

— Vitesse avant constant à 2m/s

Quelle vitesse angulaire (ω) doit être commandée selon cette loi de commande pure pursuit ?