

Feuille d'exercices #1 — Représentations, Cinématique et Odométrie - Solutions

IFT 3345

Question 1. Composition et interprétation des quaternions

Deux rotations sont appliquées séquentiellement :

1. Une rotation de 90° autour de l'axe \mathbf{x}
 2. Suivie d'une rotation de 90° autour de l'axe \mathbf{y}
- (a) Écrire les quaternions unitaires q_x et q_y correspondant aux deux rotations.
- (b) Calculer le quaternion q représentant la **rotation totale**. Choisir l'ordre de multiplication correct et le justifier brièvement. **Indice** : L'ordre de multiplication est le même que pour la composition de deux transformations.
- (c) Vérifier que le quaternion résultant est de norme unité.
- (d) Appliquer la rotation au vecteur

$$\mathbf{p} = (0, 0, 1)$$

et donner le vecteur résultant $\mathbf{p}' \in \mathbb{R}^3$.

- (e) Interpréter géométriquement l'orientation finale : après les deux rotations, où se trouve le point initial ?

Solution 1.

- (a) Rappelons qu'un quaternion unitaire représentant une rotation d'angle θ autour d'un axe unitaire \mathbf{u} est

$$q = (\cos(\theta/2), \mathbf{u} \sin(\theta/2)),$$

où θ est l'angle de rotation appliqué à l'entrée autour de l'axe donné par :

$$\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z$$

En appliquant cela au problème, on obtient

$$q_x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right)$$

et

$$q_y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

- (b) Commençons par décider de l'ordre. Il s'agit simplement de deux transformations, elles doivent donc être traitées de la manière habituelle : la transformation la plus à droite est appliquée en premier. Ainsi, pour les composer, nous devons utiliser l'ordre $q_{tot} = q_y q_x$.

Voici une explication plus détaillée :

Soit un vecteur v représenté comme un quaternion pur

$$\mathbf{v} = (0, v_x, v_y, v_z).$$

Une rotation par le quaternion q agit sur \mathbf{v} selon

$$\mathbf{v}' = q \mathbf{v} q^*.$$

Supposons que l'on applique deux rotations :

- première rotation : q_1
- deuxième rotation : q_2

Étape 1 : appliquer la première rotation

$$\mathbf{v}_1 = q_1 \mathbf{v} q_1^*.$$

Étape 2 : appliquer la deuxième rotation au résultat

$$\mathbf{v}_2 = q_2 \mathbf{v}_1 q_2^*.$$

Substituons \mathbf{v}_1 :

$$\mathbf{v}_2 = q_2 (q_1 \mathbf{v} q_1^{-1}) q_2^*.$$

Réorganisons en utilisant l'associativité de la multiplication des quaternions :

$$\mathbf{v}_2 = (q_2 q_1) \mathbf{v} (q_1^* q_2^*).$$

En utilisant l'identité $(ab)^* = b^* a^*$:

$$q_1^{-1} q_2^{-1} = (q_2 q_1)^*.$$

Donc,

$$\boxed{\mathbf{v}_2 = (q_2 q_1) \mathbf{v} (q_2 q_1)^*}$$

Ainsi, le quaternion de rotation composée est

$$\boxed{q_{\text{total}} = q_2 q_1}$$

Conclusion : le quaternion le plus à droite agit en premier, exactement comme pour la composition des matrices et des transformations projectives.

Dans notre cas :

$$q_{yx} = q_y q_x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Pour calculer ce produit (et d'autres produits de quaternions plus tard), nous aurons besoin de la « table du produit quaternion » (que nous pouvons déduire en utilisant la règle de la main droite - *right-hand rule*) :

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	- j
j	j	- k	-1	i
k	k	j	- i	-1

En la consultant, on obtient :

$$q_{yx} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} - k\frac{1}{2} \right)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$q_{yx} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

(c)

$$\|q_{yx}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

(d) On commence par représenter le vecteur $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ comme un quaternion pur (sans partie réelle). On peut faire cela pour tout vecteur de \mathbb{R}^3 en ajoutant un zéro dans la partie réelle :

$$p_{quat} = (0, 0, 0, 1)$$

On remarque que ce point se trouve sur l'axe z .

Pour calculer le point transformé, on applique la transformation quaternionique q_{yx} :

$$p'_{quat} = q_{yx} p_{quat} q_{yx}^*$$

où

$$q_{yx}^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire.

D'abord :

$$p_{quat} q_{yx}^* = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Puis :

$$p'_{quat} = q_{yx} p_{quat} q_{yx}^* = (0, 0, -1, 0)$$

Ainsi, le point obtenu est $p' = (0, -1, 0)$.

(e) La première rotation envoie le point situé sur l'axe z positif vers l'axe y négatif. La seconde rotation ne déplace pas ce point puisqu'il se trouve déjà sur l'axe y .

Question 2. LQR

Considérons le système discret 1D

$$x_{k+1} = x_k + u_k,$$

où $x_k \in \mathbb{R}$ est l'état et $u_k \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande.

Nous souhaitons concevoir un régulateur linéaire quadratique (*linear quadratic regulator - LQR*) à horizon infini qui minimise le coût

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^2 + r u_k^2),$$

où $r > 0$ est un poids scalaire sur l'effort de commande.

- Identifier les matrices A , B , Q et R pour ce système.
- Écrire l'équation algébrique de Riccati en temps discret (*Discrete Algebraic Riccati Equation - DARE*).
- Résoudre analytiquement l'équation de Riccati afin d'obtenir le coefficient P de la fonction de coût optimale (*value function*).
- Calculer la loi de commande optimale par retour d'état

$$u_k = -Kx_k,$$

et donner une expression explicite du gain K en fonction de r .

Solution 2.

(a)

$$A = 1, B = 1, Q = 1, R = r$$

(b)

$$\begin{aligned} P &= A^\top P A - A^\top P B (R + B^\top P B)^{-1} B^\top P A + Q \\ P &= P - \frac{P^2}{r + P} + 1 \\ P^2 &= r + P \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P^2 - P - r &= 0 \\ P &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4r}}{2} \end{aligned}$$

Remarquez que nous devons choisir la solution positive, car elle fournit une solution stable (ce point n'a pas vraiment été présenté en classe, mais intuitivement, puisque la loi de rétroaction est $u = -Kx$, nous voulons que K soit positif afin de fournir une rétroaction *négative*).

(d)

$$K = (R + B^\top P B)^{-1} B^\top P A$$

Dans notre cas, on obtient :

$$K = \frac{P}{r + P}$$

Si on remplace par la valeur de P calculée, on obtient :

$$K = \frac{1 + \sqrt{1 + 4r}}{2r + 1 + \sqrt{1 + 4r}}$$

Ce n'était pas demandé dans la question, mais notons qu'avec la loi de commande $u = -Kx$, la dynamique du système en boucle fermée devient :

$$x_{k+1} = (1 - K)x_k$$

(ce qui, incidemment, peut être montré stable pour toute valeur de K comprise entre 0 et 1)

Question 3. *Itération de politique - Policy iteration*

Considérons le processus de décision markovien (*Markov Decision Process* - MDP) actualisé (*discounted*) suivant, avec facteur d'actualisation (*discount factor*) :

$$\gamma = 0.9.$$

Il y a trois états :

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}.$$

L'état s_3 est terminal et ne génère plus de récompense par la suite.

À l'état s_2 , deux actions sont possibles :

$$A(s_2) = \{\text{Gauche}, \text{Droite}\}.$$

À l'état s_1 , il n'y a qu'une seule action : Droite.

Transitions et récompenses

- Depuis s_1 :
 - Aller à s_2 avec probabilité 1 et recevoir la récompense 0.
 - Depuis s_2 :
 - Action **Gauche** : avec probabilité 1, aller à s_1 et recevoir la récompense +1.
 - Action **Droite** : avec probabilité 1, aller à s_3 et recevoir la récompense +3.
 - Depuis s_3 :
 - Rester dans s_3 avec récompense 0 (état terminal).
- (a) Calculer la fonction de valeur pour une politique π_{droite} où l'on va à droite dans l'état s_2 (évaluation de politique - *policy evaluation*).
- (b) Effectuer une étape d'amélioration de politique à partir de la fonction de valeur obtenue (*policy improvement*).
- (c) La politique trouvée en (b) est optimale. Pour quelle valeur de γ ne serait-elle plus optimale?

Solution 3.

- (a) Nous devons calculer la fonction de valeur $V^{\pi_{\text{droite}}}(s)$ pour chacun des trois états s_1, s_2 et s_3 .

$$\begin{aligned} V^{\pi_{\text{droite}}}(s_3) &= 0 \\ V^{\pi_{\text{droite}}}(s_2) &= 3 + \gamma V^{\pi_{\text{droite}}}(s_3) = 3 \\ V^{\pi_{\text{droite}}}(s_1) &= 0 + \gamma V^{\pi_{\text{droite}}}(s_2) = (0.9)(3) \end{aligned}$$

- (b) Afin de vérifier si certaines décisions de la politique sont sous-optimales, nous devons évaluer la fonction de valeur état-action $Q^{\pi_{\text{droite}}}(s, a)$ puis choisir la meilleure action $\pi' = \arg \max_a Q^{\pi_{\text{droite}}}(s, a)$.

$$\begin{aligned} Q^{\pi_{\text{droite}}}(s_3, \text{aucune action}) &= 0 \\ Q^{\pi_{\text{droite}}}(s_2, \text{droite}) &= V^{\pi_{\text{droite}}}(s_2) = 3 \\ Q^{\pi_{\text{droite}}}(s_2, \text{gauche}) &= 1 + \gamma V^{\pi_{\text{droite}}}(s_1) = 1 + (0.9)^2(3) \\ Q^{\pi_{\text{droite}}}(s_1, \text{droite}) &= V^{\pi_{\text{droite}}}(s_1) = (0.9)(3) \end{aligned}$$

Le seul état où nous avons une décision à prendre est s_2 . Comme $1 + (0.9)^2(3) > 3$, la politique mise à jour doit choisir $\pi(s_2) = \text{gauche}$ (les deux autres états restent inchangés).

- (c) Pour que la politique que nous venons de calculer ne soit pas optimale, il faut que

$$1 + \gamma^2 3 < 3$$

soit $\gamma < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Question 4. *Cinématique d'un robot mobile*

Considérons un robot mobile se déplaçant sur un plan. Sa pose dans le repère monde (*world frame*) est

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix},$$

où (x, y) est la position du robot et θ son orientation.

Le robot reçoit des commandes de vitesse exprimées dans le **repère du robot** (*robot frame*) :

- v : vitesse linéaire vers l'avant
- ω : vitesse angulaire

Le modèle cinématique en temps continu est :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta) \\ \dot{y} &= v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$

- (a) Supposons que le robot démarre à

$$(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$$

et reçoit des entrées constantes $v = 1$ m/s et $\omega = \pi$ rad/s pendant 1 seconde. Calculer la pose finale.

- (b) Discrétiser ce modèle à l'aide d'Euler avant avec maintien d'ordre zéro des entrées ((Une façon élégante de dire que nous maintenons les états et les entrées constants sur l'intervalle de discrétisation). Écrire le modèle cinématique en temps discret.
- (c) En utilisant les mêmes commandes ($v = 1$ m/s et $\omega = 1$ rad/s pendant 1s) et une étape temporelle $\Delta t = 0.5$ s, calculer la nouvelle pose finale.
- (d) Quelle transformation (dans $SE(2)$) permet de passer de la pose obtenue en (c) à celle obtenue en (a) ?

Solution 4.

- (a) Nous pouvons commencer par intégrer θ pour obtenir :

$$\theta(t) = \theta_0 + (\omega)(t) \rightarrow \theta(1) = \pi$$

Nous pouvons maintenant intégrer pour trouver $x(t)$ et $y(t)$ en substituant la valeur de $\theta(t)$ calculée précédemment :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \frac{v}{\omega} [\sin(\theta(t)) - \sin(\theta_0)] \rightarrow x(1) = 0 \\ y(t) &= y_0 - \frac{v}{\omega} [\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)] \rightarrow y(1) = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

Nous aurions toutefois pu l'inférer plus simplement. Comme le robot se déplace sur un cercle de rayon $\frac{v}{\omega} = \frac{1}{\pi}$ pendant une seconde et que nous savons qu'il parcourt π radians (d'après le calcul de $\theta(1)$), le robot a parcouru un demi-cercle complet et se retrouve donc sur l'axe des y au point correspondant au diamètre du cercle.

- (b) Le modèle en temps discret sera :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + v_k \cos \theta_k \Delta t \\ y_{k+1} &= y_k + v_k \sin \theta_k \Delta t \\ \theta_{k+1} &= \theta_k + \omega_k \Delta t\end{aligned}$$

(c) Calculons d'abord la pose à $k = 1$, ce qui correspond à $t = \Delta t = 0.5s$:

$$x_1 = x_0 + v_0 \cos \theta_0 \Delta t = 0.5$$

$$y_1 = y_0 + v_0 \sin \theta_0 \Delta t = 0$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 \Delta t = \frac{\pi}{2}$$

et après cela, nous calculons la pose au temps $k = 2$, ce qui correspond à $t = 2\Delta t = 1s$.

$$x_2 = x_1 + v_1 \cos \theta_1 \Delta t = 0.5$$

$$y_2 = y_1 + v_1 \sin \theta_1 \Delta t = 0.5$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 \Delta t = \pi$$

La pose finale est donc $(0.5, 0.5, \pi)$.

(d) Nous pouvons d'abord remarquer qu'il s'agit d'une translation pure, puisque les deux orientations sont identiques. La transformation $SE(2)$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 2/\pi - 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

But if we weren't so lucky, we would have to compute the pose of solution (a), in the frame of what we got for solution (c). In general, this can be done using the the relationship :

$$T_{c \rightarrow a} = T_{a \rightarrow w}^{-1} T_{c \rightarrow w}$$

We have that :

$$T_{a \rightarrow w}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2/\pi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$T_{c \rightarrow w} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Which if we multiply together gives the same result as above.

Question 5. Transformations de frames et composition de poses

Mise en situation : Un robot se déplace sur un plan 2D. Sa pose dans le repère monde (*world frame*) est

$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{pmatrix}.$$

(a) Le robot est à

$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi/2 \end{pmatrix},$$

et un point dans le repère robot (*robot frame*) est

$${}^r p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m.}$$

Calculer les coordonnées du point dans le repère monde (*world frame*), ${}^w p$.

(b) Un point dans le repère monde (*world frame*) est

$${}^w q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le robot est à

$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \pi/4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les coordonnées du point dans le repère robot (*robot frame*), ${}^r q$.

(c) Le robot part de l'origine, orienté selon l'axe x du monde. Il avance de 2 m, tourne de $\pi/2$, puis avance de 1 m. Calculer la pose finale (x, y, θ) par composition des incréments d'odométrie.

Solution 5.

(a) Étant donné

$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \pi/2 \end{pmatrix}, \quad {}^r p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La transformation du repère du robot vers le repère monde est

$${}^w p = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} + R(\theta_r) {}^r p, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ou, de manière équivalente, exprimée en coordonnées homogènes avec une unique transformation $SE(2)$:

$$\begin{pmatrix} {}^w p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_r \\ \sin \theta & \cos \theta & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^r p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\theta_r = \pi/2$,

$$R(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$R(\pi/2)^r p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^w p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Étant donné

$${}^w q = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \pi/4 \end{pmatrix}.$$

Transformation :

$${}^r q = R(\theta_r)^T ({}^w q - \mathbf{x}_r).$$

Ou, de manière équivalente, sous forme d'une unique matrice $SE(2)$ opérant sur des coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} {}^r q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta_r)^T & -R(\theta_r)^T \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^w q \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons utiliser la première méthode. Calculons d'abord le déplacement :

$${}^w q - \mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$R(\pi/4)^T = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^r q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Pose initiale :

$$(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0).$$

Premier mouvement : avancer de 2 m, puis tourner de $\pi/2$.

$$x_1 = 0 + 2 \cos 0 = 2, \quad y_1 = 0 + 2 \sin 0 = 0, \quad \theta_1 = 0 + \frac{\pi}{2}.$$

$$(x_1, y_1, \theta_1) = (2, 0, \pi/2).$$

Deuxième mouvement : avancer de 1 m avec orientation $\theta_1 = \pi/2$.

$$x_2 = x_1 + \cos(\pi/2) = 2 + 0 = 2,$$

$$y_2 = y_1 + \sin(\pi/2) = 0 + 1 = 1,$$

$$\theta_2 = \theta_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$(x, y, \theta) = (2, 1, \pi/2).$$

Nous pouvons également exprimer ces deux mouvements comme une unique transformation composée $T_{tot} = T_0 T_1 T_2$.

Remarque : Il est fréquent de confusion avec l'ordre de composition des transformations : ici, les transformations sont composées dans l'ordre T_1T_2 , alors que dans d'autres situations de changement de repère (par exemple, question 1), la composition se fait de droite à gauche, c'est-à-dire T_2T_1 . Une distinction importante s'impose : dans ce cas, le robot effectue réellement ces mouvements. La transformation T_2 doit donc être définie dans le repère de T_1 , puisque le mouvement spécifié par T_1 a déjà été réalisé. Dans l'autre cas de changement de repère, le point de changement se situe à droite, et les transformations sont donc effectuées de droite à gauche.

Question 6. *Contrôle Pure Pursuit*

Un robot différentiel se déplace dans le plan et suit une trajectoire avec un contrôleur **pure pursuit**.

Données :

- Pose actuelle : $(x_r, y_r, \theta_r) = (1, 0, 90^\circ)$
- Trajectoire de référence : $x = 0$
- Distance d'anticipation (*lookahead distance*) : $L = 4$
- Vitesse avant constant à 2m/s

Quelle vitesse angulaire (ω) doit être commandée selon cette loi de commande pure pursuit ?

Solution 6.

Le contrôleur de poursuite pure (pure pursuit) calcule la courbure requise, κ (l'inverse du rayon), selon l'équation :

$$\kappa = \frac{2 \sin \alpha}{L}$$

où L est la distance de poursuite (*lookahead*) et α est l'angle entre l'orientation du robot et la droite reliant le robot au point de poursuite.

De plus, puisque le robot se déplace sur un cercle de courbure κ , on obtient la relation suivante entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire :

$$\omega = \kappa v$$

Dans notre cas, grâce à la géométrie du problème, on peut calculer directement $\sin \alpha = 1/4$. Par conséquent,

$$\omega = \frac{2v \sin \alpha}{L} = \frac{(2)(2)(1/4)}{4} = 1/4 \text{ rad/s}$$

Nous tournons à gauche à une vitesse angulaire de 1/4 rad/s.