

# Feuille d'exercices #3 — Estimation

IFT 3345

## Question 1. *Filtre de Bayes - Bayes filter*

Un robot se déplace dans un couloir 1D avec trois positions possibles :

$$x \in \{1, 2, 3\}$$

Au temps  $t = 0$ , la croyance du robot est :

$$bel(x_0) = [0.2, 0.5, 0.3]$$

Le robot tente de se déplacer d'une case vers la droite :  $u_1 = \text{droite}$ . Le modèle de mouvement est :

- Se déplace correctement vers la droite avec une probabilité de 0.8
- Reste sur place avec une probabilité de 0.2
- Il ne peut pas dépasser la position 3 (il reste donc en 3)

Le robot observe s'il se trouve à la position 3 à l'aide d'un capteur bruité :

- $P(z = \text{"oui"} \mid x = 3) = 0.9$
- $P(z = \text{"oui"} \mid x \neq 3) = 0.2$

Le robot reçoit la mesure  $z_1 = \text{"oui"}$ .

- (a) **Étape de prédiction** : Calculez la croyance prédite  $\overline{bel}(x_1)$  après le mouvement.
- (b) **Étape de correction** : Calculez la croyance a posteriori  $bel(x_1)$  après l'observation.
- (c) Quelle est la position la plus probable après la mise à jour ?

## Question 2. *Filtre de Kalman étendu (EKF) - Extended Kalman filter*

On considère un robot avec un état 2D :

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Avec croyance initiale :

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modèle de mouvement :

$$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, u_t) + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_{t-1} + y_{t-1}^2 + u_t \\ y_{t-1} + u_t \end{bmatrix} + \mathbf{w}$$

avec  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ , où

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et modèle de mesure :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \mathbf{v}$$

avec  $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, R)$ , où  $R = 1$ .

Nous effectuons l'actions  $u_1 = 1$  et recevons la mesure  $\mathbf{z}_1 = 7$

- Calculer la moyenne prédite  $\bar{\boldsymbol{\mu}}_1$
- Calculer la matrice Jacobienne  $\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  évaluée en  $\boldsymbol{\mu}_0$
- Calculer la covariance prédite  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_1$
- Calculer le gain de Kalman  $\mathbf{K}$
- Calculer la moyenne mise à jour  $\boldsymbol{\mu}_1$
- Calculer la covariance mise à jour  $\boldsymbol{\Sigma}_1$

### Question 3. *Filtre particulière - Particle filter*

Un robot évolue sur une ligne 1D. Sa position est estimée à l'aide d'un filtre particulière avec 3 particules :

$$x_0^{[1]} = 1, \quad x_0^{[2]} = 2, \quad x_0^{[3]} = 3$$

À chaque étape, le robot évolue selon :

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t) = \begin{cases} x + u_t & \text{avec probabilité 0.6} \\ x & \text{avec probabilité 0.3} \\ x - u_t & \text{avec probabilité 0.1} \end{cases}$$

Pour effectuer l'échantillonnage, on vous donne :

$$r^{[1]} = 0.20, \quad r^{[2]} = 0.85, \quad r^{[3]} = 0.70$$

Utilisez la règle suivante :

- $0 \leq r < 0.6 \Rightarrow x + 1$
- $0.6 \leq r < 0.9 \Rightarrow x$
- $0.9 \leq r \leq 1 \Rightarrow x - 1$

Le capteur fonctionne comme ceci :

$$P(z_t | x_t) = \begin{cases} 0.6 & \text{si } x_t = z_t \\ 0.2 & \text{si } |x_t - z_t| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous effectuons l'actions  $u_1 = 1$  et recevons la mesure  $\mathbf{z}_1 = 2$

- Calculez les nouvelles particules après application du modèle de mouvement.
- Calculez les poids normalisés.
- Après avoir fait un rééchantillonnage (*resampling*), quelle est la probabilité d'avoir l'ensemble de particules :  $x_1^{[1]} = 2, \quad x_1^{[2]} = 2, \quad x_1^{[3]} = 2$ ?

**Question 4.** *Filtre histogramme - Histogram Filter*

Un robot se déplace dans un couloir 1D avec quatre positions possibles :

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Au temps  $t = 0$  :

$$bel(x_0) = [0.1, 0.2, 0.4, 0.3]$$

Le robot tente de se déplacer d'une case vers la droite avec le modèle suivant :

- Probabilité 0.8 de se déplacer correctement
- Probabilité 0.2 de rester sur place
- Il ne peut pas dépasser la position 4 (il reste donc en 4)

Le robot observe s'il se trouve à la position 3 avec un capteur bruité :

$$P(z = \text{"oui"} \mid x) = \begin{cases} 0.9 & x = 3 \\ 0.2 & x \neq 3 \end{cases}$$

Le robot reçoit la mesure  $z = \text{"oui"}$ .

- (a) Calculez la croyance prédite  $\overline{bel}(x_1)$  après le mouvement.
- (b) Calculez la croyance a posteriori  $bel(x_1)$  après l'observation.
- (c) Quelle est la position la plus probable après les deux étapes ?