Feuille d'exercices #3 — Estimation - Solutions

IFT 3345

Question 1. *Filtre de Bayes - Bayes filter*

Un robot se déplace dans un couloir 1D avec trois positions possibles :

$$x \in \{1, 2, 3\}$$

Au temps $t = 0$, la croyance du robot est :

$$bel(x_0) = [0.2,\ 0.5,\ 0.3]$$

Le robot tente de se déplacer d'une case vers la droite : $u_1 =$ droite. Le modèle de mouvement est :

- Se déplace correctement vers la droite avec une probabilité de 0.8
- Reste sur place avec une probabilité de 0.2
- Il ne peut pas dépasser la position 3 (il reste donc en 3)

Le robot observe s'il se trouve à la position 3 à l'aide d'un capteur bruité :

- $P(z = \text{“oui”} \mid x = 3) = 0.9$
- $P(z = \text{“oui”} \mid x \neq 3) = 0.2$

Le robot reçoit la mesure $z_1 =$ “oui”.

(a) **Étape de prédiction :** Calculez la croyance prédite $\overline{bel}(x_1)$ après le mouvement.

(b) **Étape de correction :** Calculez la croyance a posteriori $bel(x_1)$ après l'observation.

(c) Quelle est la position la plus probable après la mise à jour ?

Solution 1.

(a) On calcule :

$$\overline{bel}(x_1) = \sum_{x_0} P(x_1 \mid x_0, u_1)\, bel(x_0)$$

Position 1 : La seule possibilité est de rester sur place :

$$\overline{bel}(1) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

Position 2 :

$$\overline{bel}(2) = (0.2 \cdot 0.8) + (0.5 \cdot 0.2) = 0.16 + 0.10 = 0.26$$

Position 3 :

$$\overline{bel}(3) = (0.5 \cdot 0.8) + (0.3 \cdot 1.0) = 0.40 + 0.30 = 0.70$$

Ainsi :

$$\overline{bel}(x_1) = [0.04,\ 0.26,\ 0.70]$$

(b) On applique la règle de Bayes :

$$bel(x_1) \propto P(z \mid x_1)\,\overline{bel}(x_1)$$

Non normalisé :

$$[0.04 \cdot 0.2,\ 0.26 \cdot 0.2,\ 0.70 \cdot 0.9] = [0.008,\ 0.052,\ 0.63]$$

Normalisation :

$$\eta = \frac{1}{0.008 + 0.052 + 0.63} = \frac{1}{0.69}$$

$$bel(x_1) \approx [0.012,\ 0.075,\ 0.913]$$

(c) La position la plus probable est :

$$\boxed{x = 3}$$

Question 2. *Filtre de Kalman étendu (EKF) - Extended Kalman filter*

On considère un robot avec un état 2D :

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Avec croyance initiale :

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modèle de mouvement :

$$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, u_t) + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_{t-1} + y_{t-1}^2 + u_t \\ y_{t-1} + u_t \end{bmatrix} + \mathbf{w}$$

avec $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, où

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et modèle de mesure :

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \mathbf{v}$$

avec $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, R)$, où $R = 1$.

Nous effectuons l'actions $u_1 = 1$ et recevons la mesure $\mathbf{z}_1 = 7$

(a) Calculer la moyenne prédite $\bar{\boldsymbol{\mu}}_1$

(b) Calculer la matrice Jacobienne $\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ évaluée en $\boldsymbol{\mu}_0$

(c) Calculer la covariance prédite $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_1$

(d) Calculer le gain de Kalman $\mathbf{K}$

(e) Calculer la moyenne mise à jour $\boldsymbol{\mu}_1$

(f) Calculer la covariance mise à jour $\boldsymbol{\Sigma}_1$

Solution 2.

(a)

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_1 = f(\boldsymbol{\mu}_0, u_1) = \begin{bmatrix} 1 + 2^2 + 1 \\ 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y) & \frac{\partial}{\partial y}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Évaluée en $(1, 2)$:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_1 = \mathbf{F}\boldsymbol{\Sigma}_0\mathbf{F}^\top + \mathbf{Q}$$

Comme $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_1 = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{\Sigma}}_1 \mathbf{H}^\top \left(\mathbf{H} \bar{\mathbf{\Sigma}}_1 \mathbf{H}^\top + R \right)^{-1}$$

$$\mathbf{H} \bar{\mathbf{\Sigma}}_1 \mathbf{H}^\top = 18$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{18+1} \begin{bmatrix} 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/19 \\ 4/19 \end{bmatrix}$$

(e)

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 + \mathbf{K} \left(z_1 - \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 \right)$$

$$z_1 - \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 = 7 - 6 = 1$$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18/19 \\ 4/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 132/19 \\ 61/19 \end{bmatrix}$$

(f)

$$\mathbf{\Sigma}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) \bar{\mathbf{\Sigma}}_1$$

$$\mathbf{K}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 18/19 \\ 4/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/19 & 0 \\ 4/19 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1/19 & 0 \\ -4/19 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/19 & 4/19 \\ 4/19 & 22/19 \end{bmatrix}$$

Question 3. *Filtre particulaire - Particle filter*

Un robot évolue sur une ligne 1D. Sa position est estimée à l'aide d'un filtre particulaire avec 3 particules :

$$x_0^{[1]} = 1, \quad x_0^{[2]} = 2, \quad x_0^{[3]} = 3$$

À chaque étape, le robot évolue selon :

$$p(x_t|x_{t-1}, u_t) = \begin{cases} x + u_t & \text{avec probabilité } 0.6 \\ x & \text{avec probabilité } 0.3 \\ x - u_t & \text{avec probabilité } 0.1 \end{cases}$$

Pour effectuer l'échantillonnage, on vous donne :

$$r^{[1]} = 0.20, \quad r^{[2]} = 0.85, \quad r^{[3]} = 0.70$$

Utilisez la règle suivante :

— $0 \leq r < 0.6 \Rightarrow x + 1$

— $0.6 \leq r < 0.9 \Rightarrow x$

— $0.9 \leq r \leq 1 \Rightarrow x - 1$

Le capteur fonctionne comme ceci :

$$P(z_t \mid x_t) = \begin{cases} 0.6 & \text{si } x_t = z_t \\ 0.2 & \text{si } |x_t - z_t| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous effectuons l'actions $u_1 = 1$ et recevons la mesure $\mathbf{z}_1 = 2$

(a) Calculez les nouvelles particules après application du modèle de mouvement.

(b) Calculez les poids normalisés.

(c) Après avoir fait un rééchantillonnage (*resampling*), quelle est la probabilité d'avoir l'ensemble de particules : $x_1^{[1]} = 2, \quad x_1^{[2]} = 2, \quad x_1^{[3]} = 2$?

Solution 3.

(a) On applique les règles d'échantillonnage :

— Particule 1 : $x_0^{[1]} = 1$, $r^{[1]} = 0.20 < 0.6 \Rightarrow \bar{x}_1^{[1]} = 2$

— Particule 2 : $x_0^{[2]} = 2$, $r^{[2]} = 0.85 \Rightarrow \bar{x}_1^{[2]} = 2$

— Particule 3 : $x_0^{[3]} = 3$, $r^{[3]} = 0.40 < 0.6 \Rightarrow \bar{x}_1^{[3]} = 4$

$$x^{[1]} = 2, \quad x^{[2]} = 2, \quad x^{[3]} = 3$$

(b)

$$w^{[i]} = P(z \mid x^{[i]})$$

$$w = [0.6,\ 0.6,\ 0.2]$$

Nous devons normaliser les poids. Somme :

$$0.6 + 0.6 + 0.2 = 1.4$$

$$w = \left[\frac{0.6}{1.4},\ \frac{0.6}{1.4},\ \frac{0.2}{1.4}\right] = [3/7,\ 3/7,\ 1/7]$$

(c) La probabilité serait : $(6/7)^3 \approx 0.63$ ou

$$\boxed{63\%}$$

Question 4. *Filtre histogramme - Histogram Filter*

Un robot se déplace dans un couloir 1D avec quatre positions possibles :

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Au temps $t = 0$:

$$bel(x_0) = [0.1, 0.2, 0.4, 0.3]$$

Le robot tente de se déplacer d'une case vers la droite avec le modèle suivant :

— Probabilité 0.8 de se déplacer correctement
— Probabilité 0.2 de rester sur place
— Il ne peut pas dépasser la position 4 (il reste donc en 4)

Le robot observe s'il se trouve à la position 3 avec un capteur bruité :

$$P(z = \text{“oui”} \mid x) = \begin{cases} 0.9 & x = 3 \\ 0.2 & x \neq 3 \end{cases}$$

Le robot reçoit la mesure $z =$ “oui”.

(a) Calculez la croyance prédite $\overline{bel}(x_1)$ après le mouvement.
(b) Calculez la croyance a posteriori $bel(x_1)$ après l'observation.
(c) Quelle est la position la plus probable après les deux étapes ?

Solution 4.

(a)

$$\overline{bel}(1) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$$

$$\overline{bel}(2) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.08 + 0.04 = 0.12$$

$$\overline{bel}(3) = 0.2 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.16 + 0.08 = 0.24$$

$$\overline{bel}(4) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 1.0 = 0.32 + 0.3 = 0.62$$

$$\overline{bel}(x_1) = [0.02, 0.12, 0.24, 0.62]$$

(b)

$$bel(x_1) \propto P(z \mid x_1) \cdot \overline{bel}(x_1)$$

Non normalisé :

$$[0.02 \cdot 0.2,\ 0.12 \cdot 0.2,\ 0.24 \cdot 0.9,\ 0.62 \cdot 0.2] = [0.004, 0.024, 0.216, 0.124]$$

Normalisation :
Somme $= 0.004 + 0.024 + 0.216 + 0.124 = 0.368$

$$bel(x_1) = [0.004/0.368,\ 0.024/0.368,\ 0.216/0.368,\ 0.124/0.368] \approx [0.011, 0.065, 0.587, 0.337]$$

(c) Position la plus probable

$$\boxed{x = 3}$$