Feuille d'exercices #4 — SLAM

IFT 3345

Question 1. *Cartographie par grille d'occupation (occupancy grid mapping)*

Un robot construit une carte d'occupation (*occupancy grid map*) 1D composée de trois cellules :

$$m = \{m_1, m_2, m_3\}$$

- A priori : $P(m_i = \text{occ}) = 0.5$
- Modèle de capteur :
  - Si une cellule est observée comme **occupée** : $P(m_i = \text{occ} \mid z_t) = 0.7$
  - Si une cellule est observée comme **libre** : $P(m_i = \text{occ} \mid z_t) = 0.3$

À chaque instant, le robot observe les cellules le long d'un rayon :

- $t = 1$: cellule 1 = libre, cellule 2 = libre, cellule 3 = occupée
- $t = 2$: cellule 1 = libre, cellule 2 = occupée (le rayon s'arrête ici)

(a) Calculer les log-cotes (*log-odds*) pour chaque cellule après $t = 1$.

(b) Calculer les log-cotes (*log-odds*) pour chaque cellule après $t = 2$.

(c) Convertir les log-cotes (*log-odds*) finales en probabilités.

(d) Quelles cellules doivent être considérées comme occupées ?

Question 2. *EKF-SLAM*

Un robot évolue en 1D et estime :

- sa position x
- la position d'un point de repère m

L'état est donné par :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix}$$

Le croyance (*belief*) initiale est :

$$\text{bel}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

Le robot se déplace selon :

$$x_{t+1} = x_t + u_t + w, \quad \text{avec } u_0 = 1 \quad \text{et } w \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$$

Le robot observe le point de repère avec :

$$z_t = m - x_t + v, \quad \text{avec } v \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$$

À l'instant $t = 1$, la mesure est :

$$z_1 = 3.8$$

(a) Effectuer l'étape de prédiction : calculer $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_1)$.

(b) Effectuer la mise à jour : calculer $\text{bel}(\mathbf{x}_1)$

(c) Interprétation :
   - l'incertitude sur x a-t-elle augmenté ou diminué ?
   - les variables x et m sont-elles corrélées après la mise à jour ?

Question 3. *FAST-SLAM*

On considère un algorithme FAST-SLAM avec deux particules. Chaque particule représente une hypothèse sur la position du robot et contient une estimation Gaussienne d'un point de repère m.

Le modèle de mesure est :

$$z = m - x + v$$

avec un bruit Gaussien :

$$v \sim \mathcal{N}(0, R), \quad R = 1$$

À l'instant courant, les particules sont :

- Particule 1 :
$$x^{[1]} = 1, \quad \mu_m^{[1]} = 5, \quad \Sigma_m^{[1]} = 1$$
- Particule 2 :
$$x^{[2]} = 2, \quad \mu_m^{[2]} = 6, \quad \Sigma_m^{[2]} = 2$$

La mesure reçue est :

$$z = 3.5$$

Pour chaque particule i :

(a) Calculer l'innovation, $\nu^{[i]}$

(b) Calculer la covariance de l'innovation, $S^{[i]}$

(c) Calculer le poids non normalisé :
$$w^{[i]} \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\nu^{[i]})^2}{S^{[i]}}\right).$$

(d) Normaliser les poids.

(e) Quelle particule est la plus probable après la mesure ?

(f) Pour la particule 1 uniquement, effectuer la mise à jour EKF du point de repère m.

Question 4. *Factor Graph et Square-Root SAM*

On considère un problème de SLAM en 1D avec deux poses du robot x_1, x_2 et un point de repère m.

On dispose des facteurs suivants :

- Prior sur x_1 : $x_1 = 0$, variance $\sigma^2 = 1$
- Odometry : $x_2 - x_1 = 1$, variance $\sigma^2 = 1$
- Observation : $m - x_2 = 2$, variance $\sigma^2 = 1$

(a) Écrire les résidus sous la forme $r = h(x) - z$.

(b) Linéariser (ici le modèle est déjà linéaire) et écrire le système sous forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ m]^T$.

(c) Résoudre le système des moindres carrés (*least-squares*) :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

(d) Donner une interprétation du résultat.