Feuille d'exercices #4 — SLAM - Solutions

IFT 3345

Question 1. *Cartographie par grille d'occupation (occupancy grid mapping)*

Un robot construit une carte d'occupation (*occupancy grid map*) 1D composée de trois cellules :

$$m = \{m_1, m_2, m_3\}$$

— A priori : $P(m_i = \text{occ}) = 0.5$

— Modèle de capteur :

  — Si une cellule est observée comme **occupée** : $P(m_i = \text{occ} \mid z_t) = 0.7$

  — Si une cellule est observée comme **libre** : $P(m_i = \text{occ} \mid z_t) = 0.3$

À chaque instant, le robot observe les cellules le long d'un rayon :

— $t = 1$: cellule 1 = libre, cellule 2 = libre, cellule 3 = occupée

— $t = 2$: cellule 1 = libre, cellule 2 = occupée (le rayon s'arrête ici)

(a) Calculer les log-cotes (*log-odds*) pour chaque cellule après $t = 1$.

(b) Calculer les log-cotes (*log-odds*) pour chaque cellule après $t = 2$.

(c) Convertir les log-cotes (*log-odds*) finales en probabilités.

(d) Quelles cellules doivent être considérées comme occupées ?

Solution 1.

On utilise la **représentation en log-cotes (*log-odds*)** :

$$l_t^i = \log \frac{P(m_i = \text{occ} \mid z_{1:t})}{1 - P(m_i = \text{occ} \mid z_{1:t})}$$

La règle de mise à jour est :

$$l_t^i = l_{t-1}^i + \log \frac{P(m_i \mid z_t)}{1 - P(m_i \mid z_t)} - l_0$$

On commence par calculer les incréments en log-cotes :

$$l_{\text{occ}} = \log\left(\frac{0.7}{0.3}\right) \approx 0.847, \quad l_{\text{libre}} = \log\left(\frac{0.3}{0.7}\right) \approx -0.847$$

Comme $l_0 = 0$, la mise à jour consiste simplement à additionner ces valeurs.

(a) Après $t = 1$

Observations : cellule 1 = libre, cellule 2 = libre, cellule 3 = occupée.

$$l_1^1 = -0.847, \quad l_1^2 = -0.847, \quad l_1^3 = +0.847$$

(b) Après $t = 2$

Observations : cellule 1 = libre, cellule 2 = occupée, cellule 3 = non observée.

$$l_2^1 = -0.847 + (-0.847) = -1.694$$
$$l_2^2 = -0.847 + 0.847 = 0$$
$$l_2^3 = 0.847 \quad \text{(inchangé)}$$

(c) Conversion en probabilités

$$P = \frac{1}{1 + e^{-l}}$$

$$P(m_1) = \frac{1}{1 + e^{1.694}} \approx 0.155$$
$$P(m_2) = \frac{1}{1 + e^{0}} = 0.5$$
$$P(m_3) = \frac{1}{1 + e^{-0.847}} \approx 0.7$$

(d) Cellules les plus susceptibles d'être occupées

Avec un seuil de 0.5 :

— m_1 : libre
— m_2 : incertain
— m_3 : occupée

Question 2. *EKF-SLAM*

Un robot évolue en 1D et estime :

- sa position x
- la position d'un point de repère m

L'état est donné par :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ m \end{bmatrix}$$

Le croyance (*belief*) initiale est :

$$\mathrm{bel}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

Le robot se déplace selon :

$$x_{t+1} = x_t + u_t + w, \quad \text{avec } u_0 = 1 \quad \text{et } w \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$$

Le robot observe le point de repère avec :

$$z_t = m - x_t + v, \quad \text{avec } v \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$$

À l'instant $t = 1$, la mesure est :

$$z_1 = 3.8$$

(a) Effectuer l'étape de prédiction : calculer $\overline{\mathrm{bel}}(\mathbf{x}_1)$.

(b) Effectuer la mise à jour : calculer $\mathrm{bel}(\mathbf{x}_1)$

(c) Interprétation :
- l'incertitude sur x a-t-elle augmenté ou diminué ?
- les variables x et m sont-elles corrélées après la mise à jour ?

Solution 2.

(a) Prédiction

L'état prédit est :

$$\bar{\mu}_1 = \begin{bmatrix} x_0 + u_0 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La matrice de transition est :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le bruit de processus s'applique uniquement à x :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\bar{\mathbf{\Sigma}}_1 = \mathbf{F}\mathbf{\Sigma}_0\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Correction

La fonction de mesure est :

$$h(x_t, m, v) = m - x_t + v$$

La Jacobienne est :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Innovation :

$$\tilde{z}_1 = z_1 - h(x_1, m, 0) = 3.8 - (5 - 1) = 3.8 - 4 = -0.2$$

Covariance de l'innovation :

$$S_1 = \mathbf{H}_1 \bar{\mathbf{\Sigma}}_1 \mathbf{H}_1^T + R$$

$$S_1 = [-1\ 1] \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 = 1.5 + 1 + 0.5 = 3$$

Gain de Kalman :

$$\mathbf{K}_1 = \bar{\mathbf{\Sigma}}_1 \mathbf{H}_1^T S_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

Mise à jour de l'état :

$$\mu_1 = \bar{\mu}_1 + \mathbf{K}_1 \tilde{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.333 \end{bmatrix} (-0.2)$$

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 4.933 \end{bmatrix}$$

Maintenant, on calcul la covariance a posteriori.

On utilise l'équation de mise à jour de l'EKF :

$$\mathbf{\Sigma}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1) \bar{\mathbf{\Sigma}}_1$$

Calcul de **KH**

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.333 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.333 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\mathbf{I} - \mathbf{KH}$

$$\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.333 & 0.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.333 & 0.667 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\mathbf{\Sigma}$

$$\bar{\mathbf{\Sigma}}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.333 & 0.667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 0.667 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 0.667 \end{bmatrix}$$

(c) Interprétation

- L'incertitude sur x diminue (de 1.5 à 0.75).
- Les variables x et m deviennent corrélées (termes hors diagonale non nuls).

Question 3. *FAST-SLAM*

On considère un algorithme FAST-SLAM avec deux particules. Chaque particule représente une hypothèse sur la position du robot et contient une estimation Gaussienne d'un point de repère m.

Le modèle de mesure est :

$$z = m - x + v$$

avec un bruit Gaussien :

$$v \sim \mathcal{N}(0, R), \quad R = 1$$

À l'instant courant, les particules sont :

— Particule 1 :

$$x^{[1]} = 1, \quad \mu_m^{[1]} = 5, \quad \Sigma_m^{[1]} = 1$$

— Particule 2 :

$$x^{[2]} = 2, \quad \mu_m^{[2]} = 6, \quad \Sigma_m^{[2]} = 2$$

La mesure reçue est :

$$z = 3.5$$

Pour chaque particule i :

(a) Calculer l'innovation, $\nu^{[i]}$

(b) Calculer la covariance de l'innovation, $S^{[i]}$

(c) Calculer le poids non normalisé :

$$w^{[i]} \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\nu^{[i]})^2}{S^{[i]}}\right).$$

(d) Normaliser les poids.

(e) Quelle particule est la plus probable après la mesure ?

(f) Pour la particule 1 uniquement, effectuer la mise à jour EKF du point de repère m.

Solution 3.

(a) Prédiction de mesure

$$\hat{z}^{[1]} = 5 - 1 = 4$$
$$\hat{z}^{[2]} = 6 - 2 = 4$$

Innovation

$$\nu^{[1]} = 3.5 - 4 = -0.5$$
$$\nu^{[2]} = 3.5 - 4 = -0.5$$

(b) Covariance de l'innovation

$$S^{[1]} = 1 + 1 = 2$$
$$S^{[2]} = 2 + 1 = 3$$

(c) Poids non normalisés

$$w^{[1]} \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{0.5^2}{2}\right) = \exp(-0.0625)$$

$$w^{[2]} \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{0.5^2}{3}\right) = \exp(-0.0417)$$

(d) Normalisation

$$w^{[1]} = \frac{\exp(-0.0625)}{\exp(-0.0625) + \exp(-0.0417)}$$
$$w^{[2]} = \frac{\exp(-0.0417)}{\exp(-0.0625) + \exp(-0.0417)}$$

Numériquement :

$$w^{[1]} \approx 0.49, \quad w^{[2]} \approx 0.51$$

(e) Interprétation
La particule 2 est légèrement plus probable.

(f) Mise à jour EKF (particule 1)
Jacobienne :

$$H = 1$$

Gain de Kalman :

$$K = \frac{\Sigma_m^{[1]}}{\Sigma_m^{[1]} + R} = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

Mise à jour de la moyenne :

$$\mu_m^{[1]} \leftarrow \mu_m^{[1]} + K\tilde{z}^{[1]} = 5 + 0.5 \cdot (-0.5) = 4.75$$

Mise à jour de la variance :

$$\Sigma_m^{[1]} \leftarrow (1-K)\Sigma_m^{[1]} = (1-0.5) \cdot 1 = 0.5$$

Question 4. *Factor Graph et Square-Root SAM*

On considère un problème de SLAM en 1D avec deux poses du robot x_1, x_2 et un point de repère m. On dispose des facteurs suivants :

— Prior sur x_1 : $x_1 = 0$, variance $\sigma^2 = 1$

— Odometry : $x_2 - x_1 = 1$, variance $\sigma^2 = 1$

— Observation : $m - x_2 = 2$, variance $\sigma^2 = 1$

(a) Écrire les résidus sous la forme $r = h(x) - z$.

(b) Linéariser (ici le modèle est déjà linéaire) et écrire le système sous forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; m]^T$.

(c) Résoudre le système des moindres carrés (*least-squares*) :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

(d) Donner une interprétation du résultat.

Solution 4.

(a) Résidus

$$r_1 = x_1 - 0$$
$$r_2 = (x_2 - x_1) - 1$$
$$r_3 = (m - x_2) - 2$$

(b) Système linéaire

On écrit chaque résidu sous forme matricielle :

$$r_1 = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix} - 0$$
$$r_2 = [-1\ 1\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix} - 1$$
$$r_3 = [0\ \ -1\ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix} - 2$$

Donc :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Résolution par équations normales

On cherche à minimiser :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

Les équations normales sont :

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

Calcul de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Résolution du système :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ce système correspond aux équations :

$$2x_1 - x_2 = -1$$

$$-x_1 + 2x_2 - m = -1$$

$$-x_2 + m = 2$$

On résout :

$$m = x_2 + 2$$

$$-x_1 + 2x_2 - (x_2 + 2) = -1 \Rightarrow -x_1 + x_2 - 2 = -1 \Rightarrow -x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 - x_2 = -1$$

En combinant :

$$x_2 = x_1 + 1$$

$$2x_1 - (x_1 + 1) = -1 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_2 = 1, \quad m = 3$$

Donc :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(d) Interprétation

— Le robot commence à $x_1 = 0$
— Il se déplace de 1 vers $x_2 = 1$
— Le point de repère est situé à $m = 3$

Tous les facteurs sont parfaitement satisfaits, donc l'erreur est nulle.